Exercice 1 : ***4,5 points***

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A , B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 3 + i$ et $z_C = 3$

1) a) Justifier qu'il existe une unique similitude indirecte f telle que : $f(A) = B$ et $f(O) = C$.

b) Montrer que l'écriture complexe de f est : $z' = \frac{i}{2}\bar{z} + 3$.

c) Préciser les éléments caractéristiques de f (on notera Ω le centre de f et Δ son axe).

d) Montrer que :$(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{C\Omega}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{O\Omega},\overrightarrow{CB}})\ [2\pi]$

2) On considère l'application g qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\bar{z} + 8$.

a) Déterminer l'écriture complexe de gog.

b) En déduire que g est une symétrie orthogonale d'axe une droite D que l'on précisera.

c) Caractériser $S_\Delta\ oS_D$ et fog.

3) On considère la suite de points (A_n) définie sur IN par :$A_0 = A$ et pour tout entier naturel non nul n on a

$A_n = \underbrace{fofofofofo\ldots\ldots of}_{2n\text{ fois}}(A)$

a) On note z_n, l'affixe de A_n. montrer que $z_n = -2\left(\frac{1}{4}\right)^n(1+i) + 4 + 2i$

b) Déterminer la position limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 : ***4 points***

A/ 1) Justifier l'existence d'un inverse de 7 modulo 26.

2) Donner l'ensemble des inverses de 7 modulo 26.

3) Résoudre dans Z^2 : $7x - 26y = 2019$

B/ 1) Montrer que pour tous entiers n et m , on a :$7n + 3 \equiv m \pmod{26} \Leftrightarrow 15m + 7 \equiv n \pmod{26}$

2) On assimile chaque lettre de l'alphabet à un entier comme l'indique le tableau ci-dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit l'application f définie dans l'ensemble $\Gamma = \{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, 24, 25\}$ par $f(n)$ = le reste de la division euclidienne de 7n +3 par 26

a) Montrer que l'application f est une bijection de A dans A et définir son application réciproque g

b) On définit un procédé de codage de la façon suivante

A la lettre que l'on veut coder , on associe l'entier n de Γ (voir tableau) puis on calcule

$m = f(n)$ ainsi la lettre que l'on veut coder est codée par la lettre qui correspond à m

Coder le mot BAC

Reconnaitre le mot dont le code est LPA

Exercice 3 : 4 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) Soit (P_0) la parabole d'équation : $y^2 = 4x - 4$
   a) Déterminer le foyer et la directrice de (P_0) puis tracer (P_0)
   b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la parabole (P_0) et la droite d'équation $x = 3$
2) Soit $F(a,b)$ un point du plan tels que $a > 0$ et soit (P) la parabole de foyer F et de directrice la droite des ordonnées.
   a) Prouver qu'une équation de (P) est : $(y-b)^2 = 2ax - a^2$
   b) Montrer que (P) passe par le point $A(1,0)$ si et seulement si F appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 1 privé du point O.
3) Soient F_1 et F_2 deux points du cercle $(\mathcal{C})$ privé de O et P_1 et P_2 les paraboles correspondantes.
   Montrer que les tangentes en A aux paraboles P_1 et P_2 sont perpendiculaires si et seulement si F_1 et F_2 sont diamétralement opposés sur $(\mathcal{C})$

Exercice 4 : 7,5 points

A) On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$

Par $\begin{cases} f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par ζ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités graphiques 2cm).

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0
   b) Montrer que f est dérivable à droite en 0
   c) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour $x > 0$
2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Montrer que ζ admet un point d'inflexion que l'on déterminera.
   d) Construire ζ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (on prendra $f(1) \simeq 0,7$ et $4e^{-3} \simeq 0,2$)

B) On considère F définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

1) Montrer que F est continue sur $[0,+\infty[$

2) a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

b) Montrer que $\int_0^1 f(x)dx = e^{-1}$

3) Calculer en cm² l'aire du domaine limité par ζ et $x = 0$, $x = 2$ et $y = 0$

4) On considère la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par $U_n = F(n) - F(n+2)$

a) Montrer que pour tout entier $n > 0$,il existe $V_n \in]n, n+2[$ tel que $U_n = 2\left(1+\frac{1}{V_n}\right)e^{-\frac{1}{V_n}}$

b) Montrer que pour tout entier $n > 0$, $2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{n}} \leq U_n \leq 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{-\frac{1}{n+2}}$

c) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

C) 1) a) Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe a_n tel que $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$

b) Montrer que $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Vérifier que, pour tout entier $n > 0$, $-\frac{1}{a_n} + Ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$

2) a) Montrer que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

b) Montrer que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $-\frac{x^2}{2} \leq -x + Ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

3) soit n un entier supérieur ou égal à 4.

a) Vérifier que $a_4 \geq 1$ puis déduire que $a_n \geq 1$

b) Montrer que $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^{\ 2}}{n} \leq 1$

c) Montrer que $a_n \geq \sqrt{\frac{n}{6}}$, déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

d) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$